לוגיקה (1) – תרגיל 9

1. לכל אחד מן הפסוקים הבאים קבעו אם הוא אמיתי לוגית לכל נוסחה φ בה x המשתנה החופשי היחיד. אם כן, הוכיחו ישירות מהגדרת האמת, אם לא – תנו דוגמה נגדית, כלומר נוסחה φ ומבנה A בו הפסוק אינו אמיתי.
   א. $\exists x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$
   ב. $(\forall x \exists y \varphi(x, y)) \rightarrow (\exists y \forall x \varphi(x, y))$
   ג. $(\exists x \forall y \varphi(x, y)) \rightarrow (\forall y \exists x \varphi(x, y))$
   ד. תהי $\tau(p_1, \ldots, p_n)$ טאוטולוגיה של תחשיב **הפסוקים**. הראו שאם $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ נוסחות בתחשיב **היחסים** אז $\forall x(\tau(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ אמיתי לוגית, כאשר $\tau(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ הוא הביטוי המתקבל מ- $sub(\tau, (p_1, \ldots p_n), (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)))$.

2. קבעו מי מן הביטויים הבאים הוא **טאוטולוגיה** של תחשיב היחסים. הוכיחו את טענותיכם (לנוסחה שהיא טאוטולוגיה הראו מאיזו טאוטולוגיה של תחשיב הפסוקים היא מתקבלת, ומהי ההצבה המתאימה, ואילו לנוסחה שאינה טאוטולוגיה הוכיחו שאינה יכולה להתקבל באופן הנ"ל).
   א. $\exists x \varphi(x) \vee \neg\exists x \varphi(x)$.
   ב. $\exists x \varphi(x) \vee \exists x \neg\varphi(x)$.
   ג. $\forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$.
   ד. $\forall x \varphi(x) \rightarrow \neg\exists x \neg\varphi(x)$.

3.
   א. הגדירו מהי הצבה כשרה בתחשיב היחסים ונסחו את משפט ההצבה לתחשיב היחסים.
   ב. תנו דוגמה להצבה לא כשרה והוכיחו כי בדוגמה שנתתם משפט ההצבה אינו מתקיים.

4.
   א. תהי $\varphi(\bar{x})$ נוסחה בשפה L של תחשיב היחסים. תהי $L_\varphi \subseteq L$ תת-שפה המכילה בדיוק את כל סימני היחס, סימני הפונקציה והקבועים האישיים המופיעים ב- φ (ל- L_φ אפשר לקרוא "השפה של φ"). יהיו A, B מבנים לשפה L, כך של-A ול-B אותו עולם (כלומר, $|A| = |B|$). נניח שלכל $R \in L_\varphi$, $R^A = R^B$, לכל קבוע אישי $c \in L_\varphi$, $c^A = c^B$ ולכל $f \in L_\varphi$, $f^A = f^B$ (כלומר, לכל סימני השפה החלקית L_φ אותו הפירוש ב-A וב-B). הראו שלכל השמה s מתקיים $A^s(\varphi(x)) = B^s(\varphi(x))$. במילים אחרות: הערך של נוסח φ במבנה (תחת השמה מתאימה) תלוי רק בפרוש שהמבנה נותן לשפה של φ.
   ב. יהיו φ פסוק (בתחשיב היחסים), $\psi(x)$ נוסחה ו- c קבוע אישי שאינו מופיע ב- φ או ב- ψ. הראו שאם $\varphi \models \psi(c)$ (כאשר $\psi(c)$ הוא הפסוק המתקבל מ- $\psi(x)$ ע"י הצבת הקבוע c עבור x) אזי $\varphi \models \forall x \psi(x)$.

5.
   א. תהי Γ קבוצת פסוקים סופית בתחשיב **הפסוקים** תנו חסם מלעיל למספר הקדקודים בעץ האמת של Γ.
   ב. כתבו את עץ האמת של קבוצת הפסוקים $\{(p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow p, \neg p \vee \neg q \vee \neg r, p \rightarrow \neg r\}$. ודאו כי בכל עלה של עץ האמת שקיבלתם יש או פסוק יסודי ושלילתו או סדרה של פסוקים אטומים ושלילות של פסוקים אטומיים.